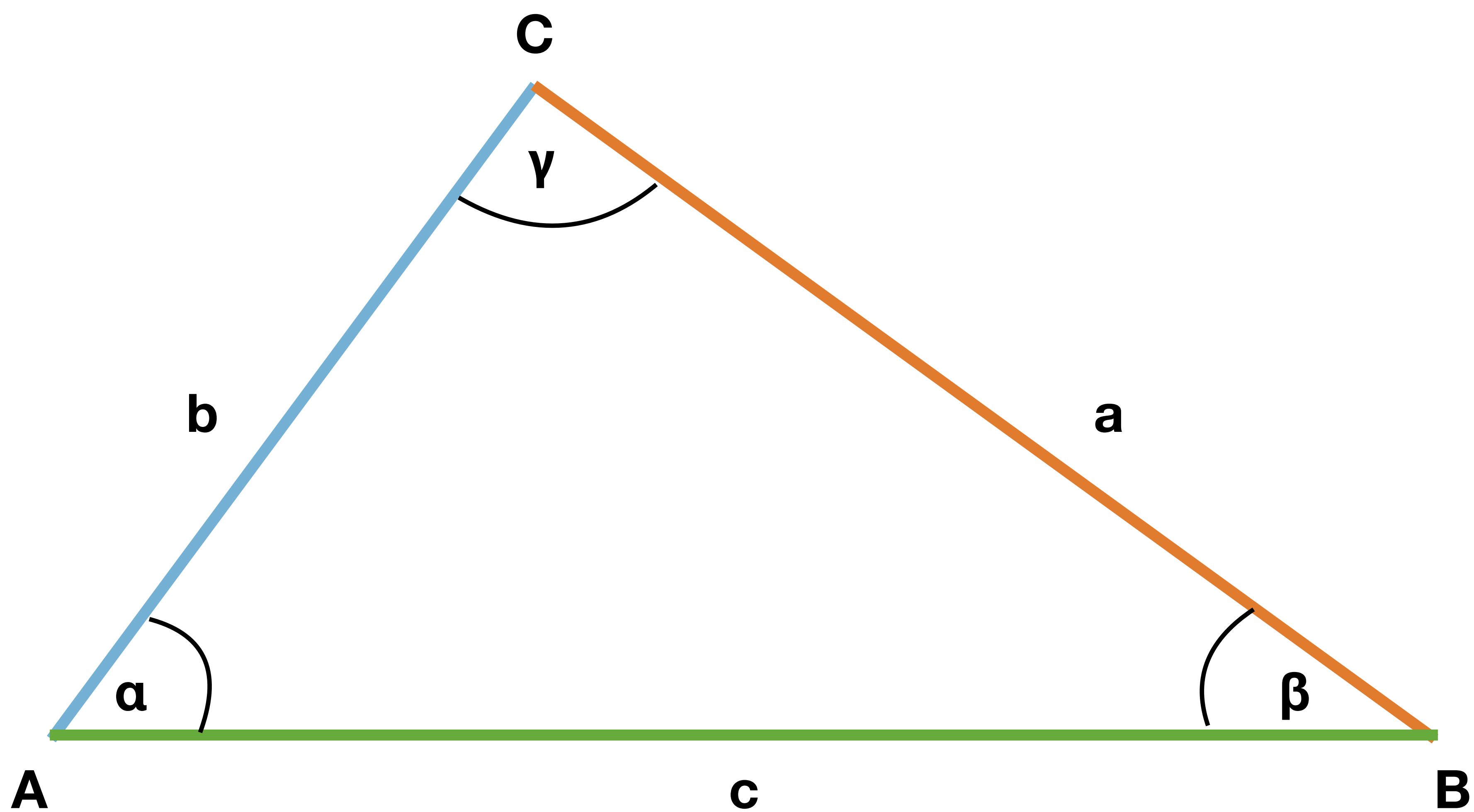
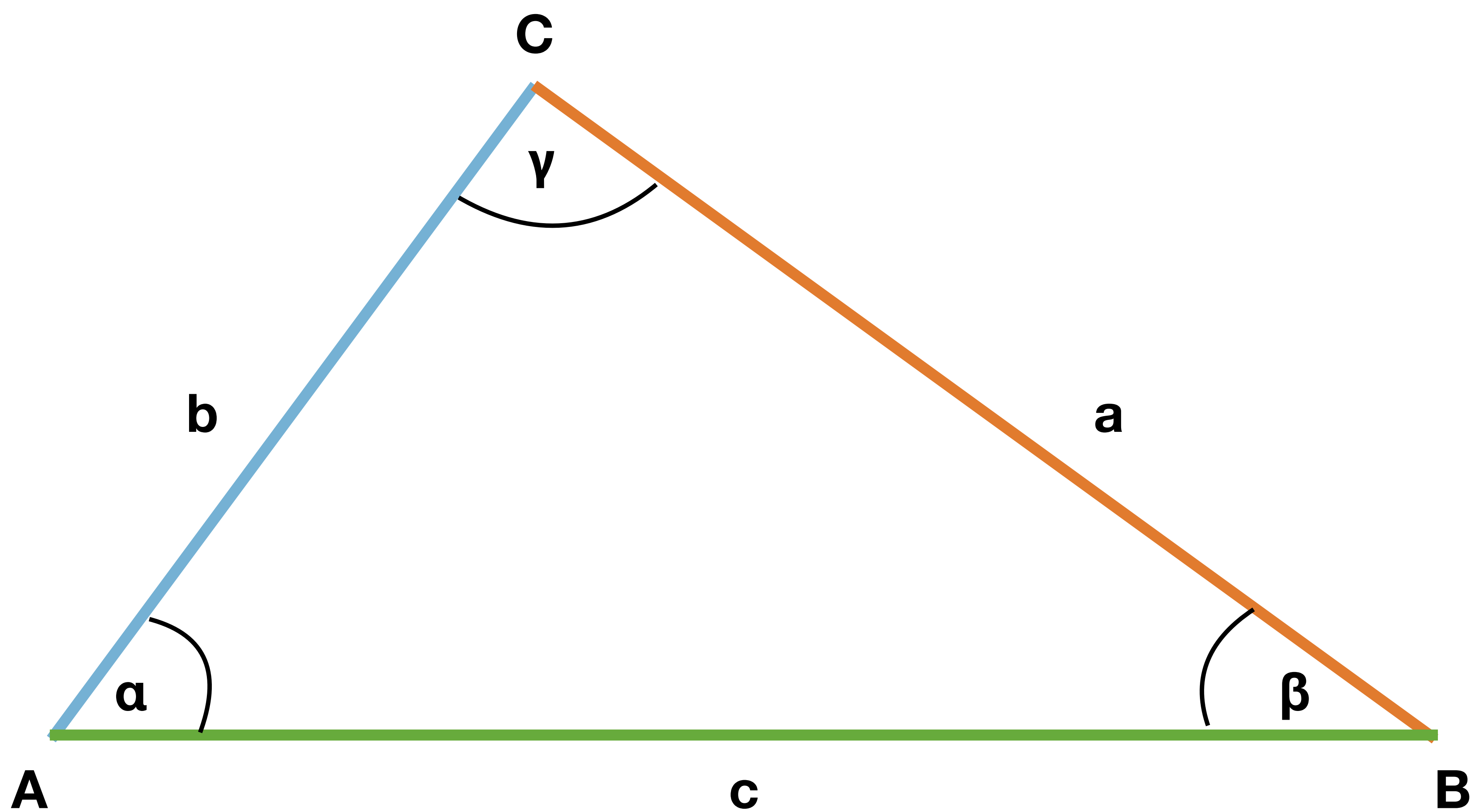
Winkelfunktionen

Rechtwinkliges Dreieck



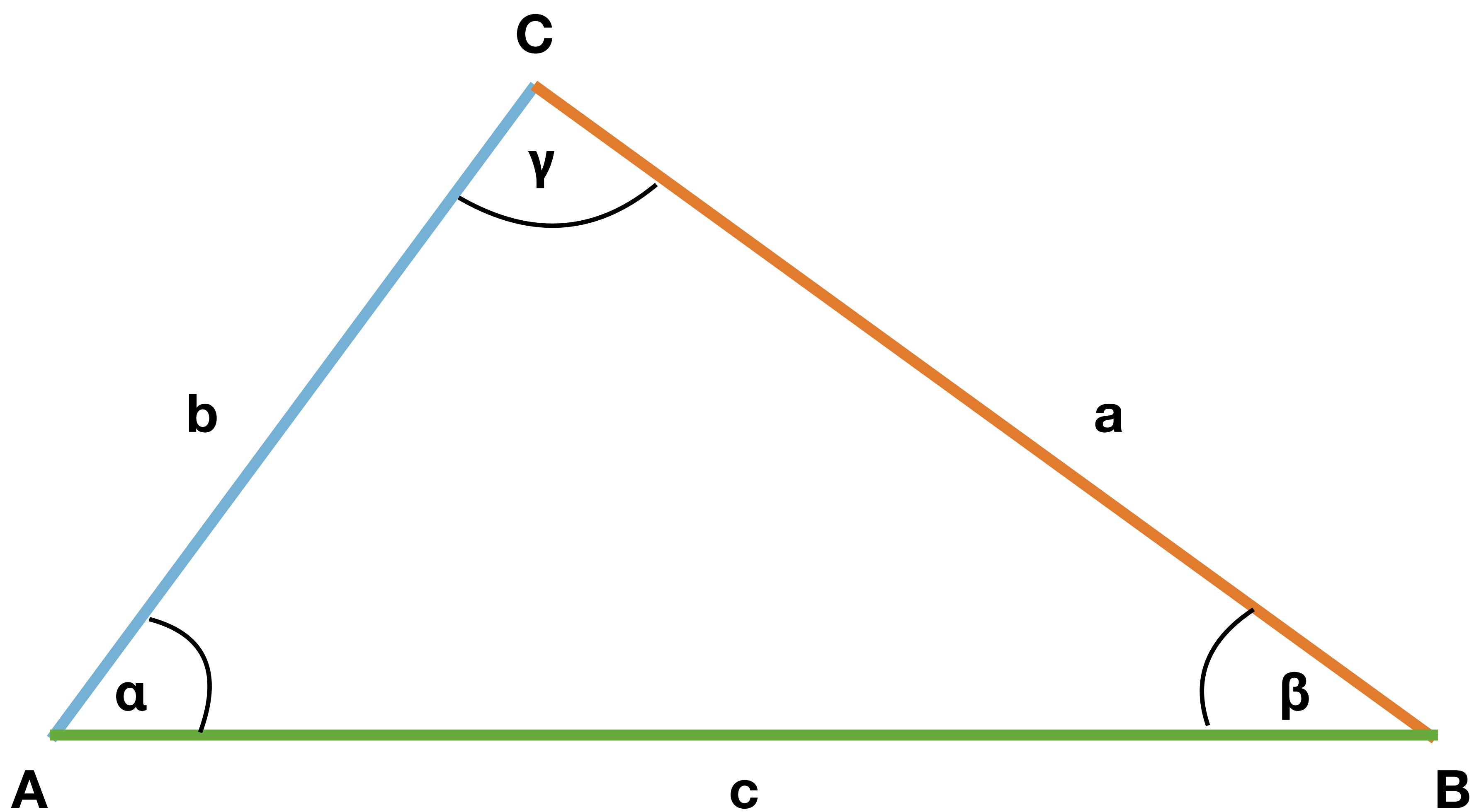
$\gamma = 90°$
c - Hypotenuse
a,b - Katheten

Rechtwinkliges Dreieck

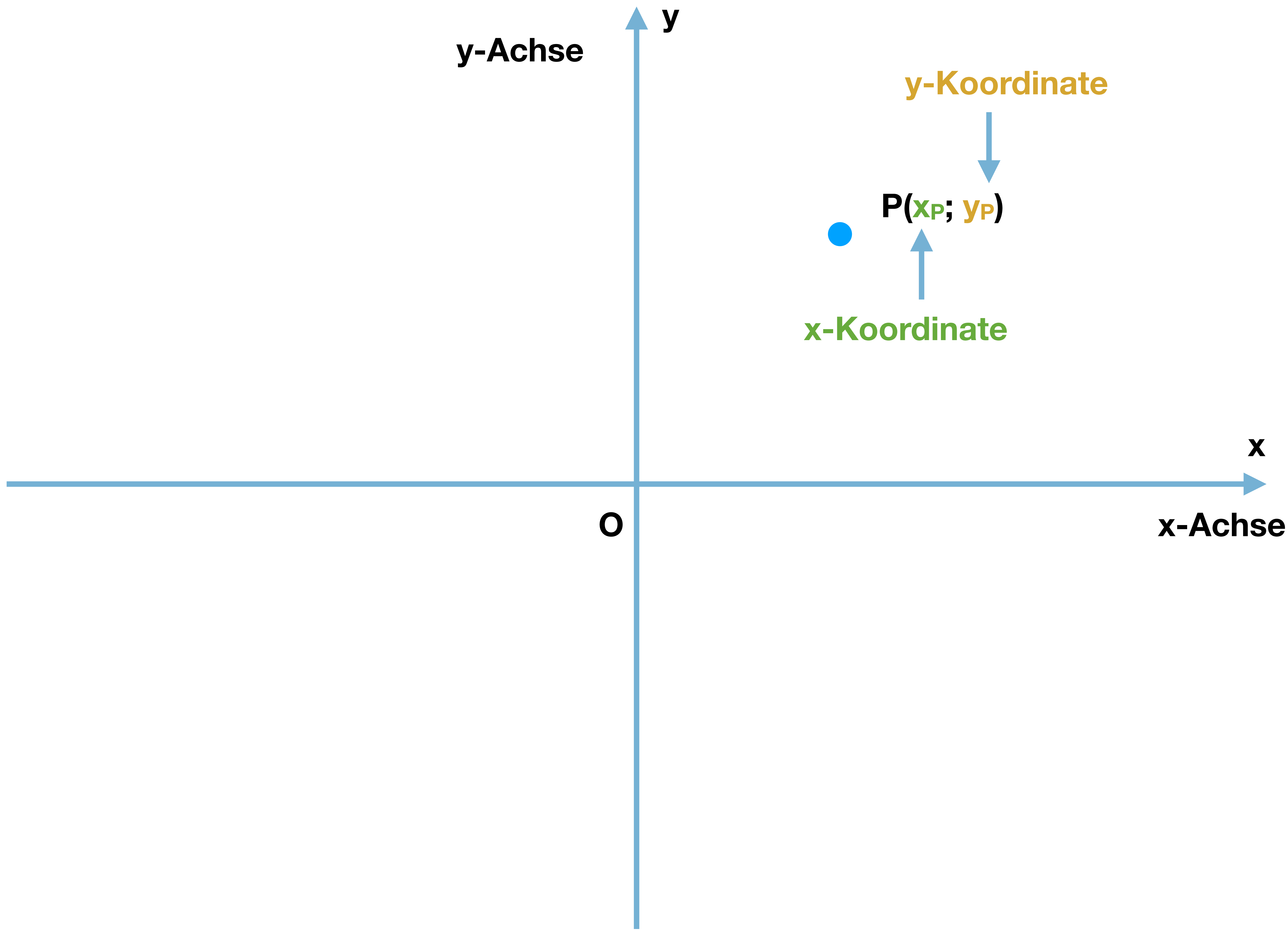


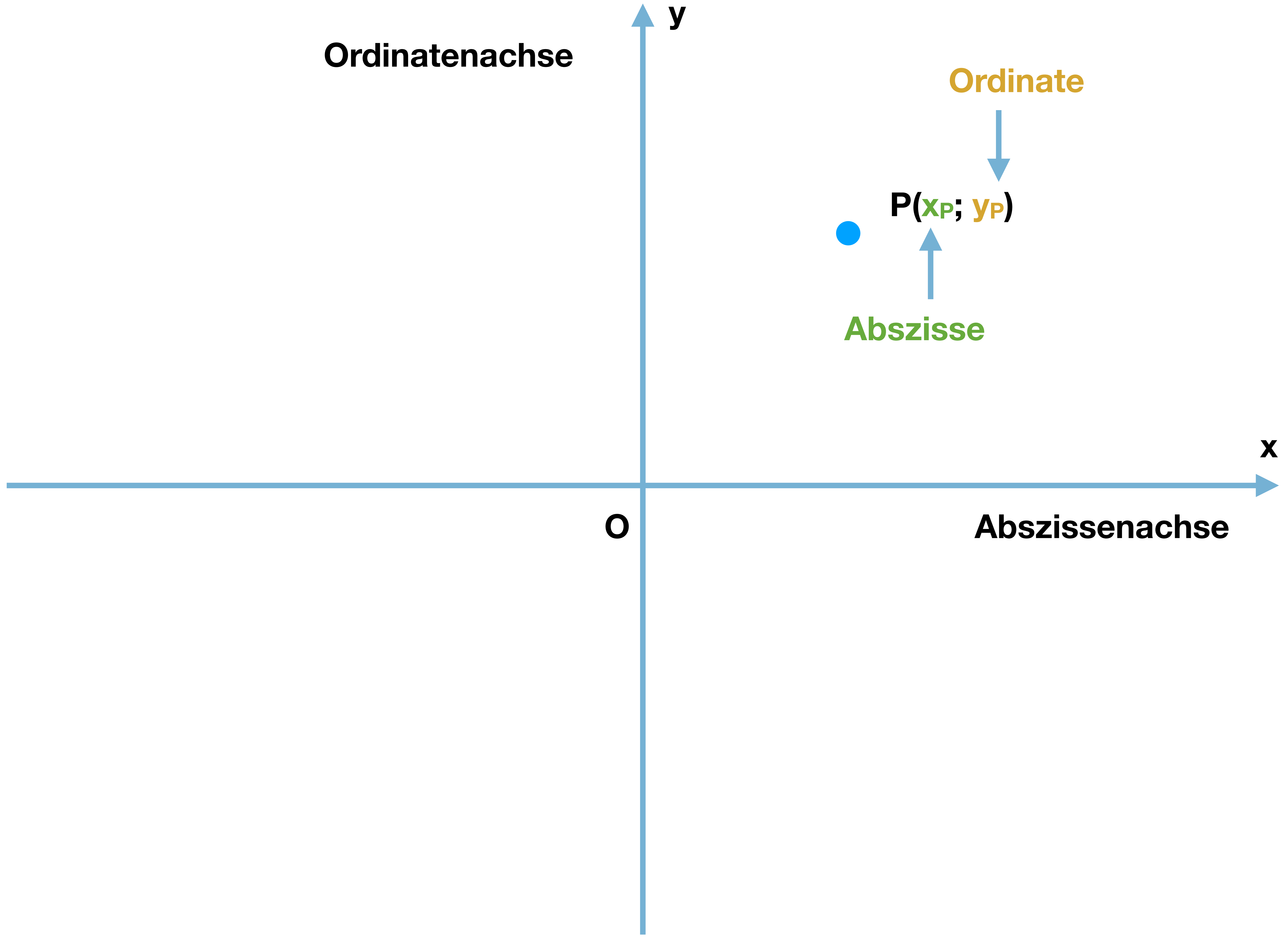
$$Sinus = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

Rechtwinkliges Dreieck



$$sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad sin(\beta) = \frac{b}{c}$$

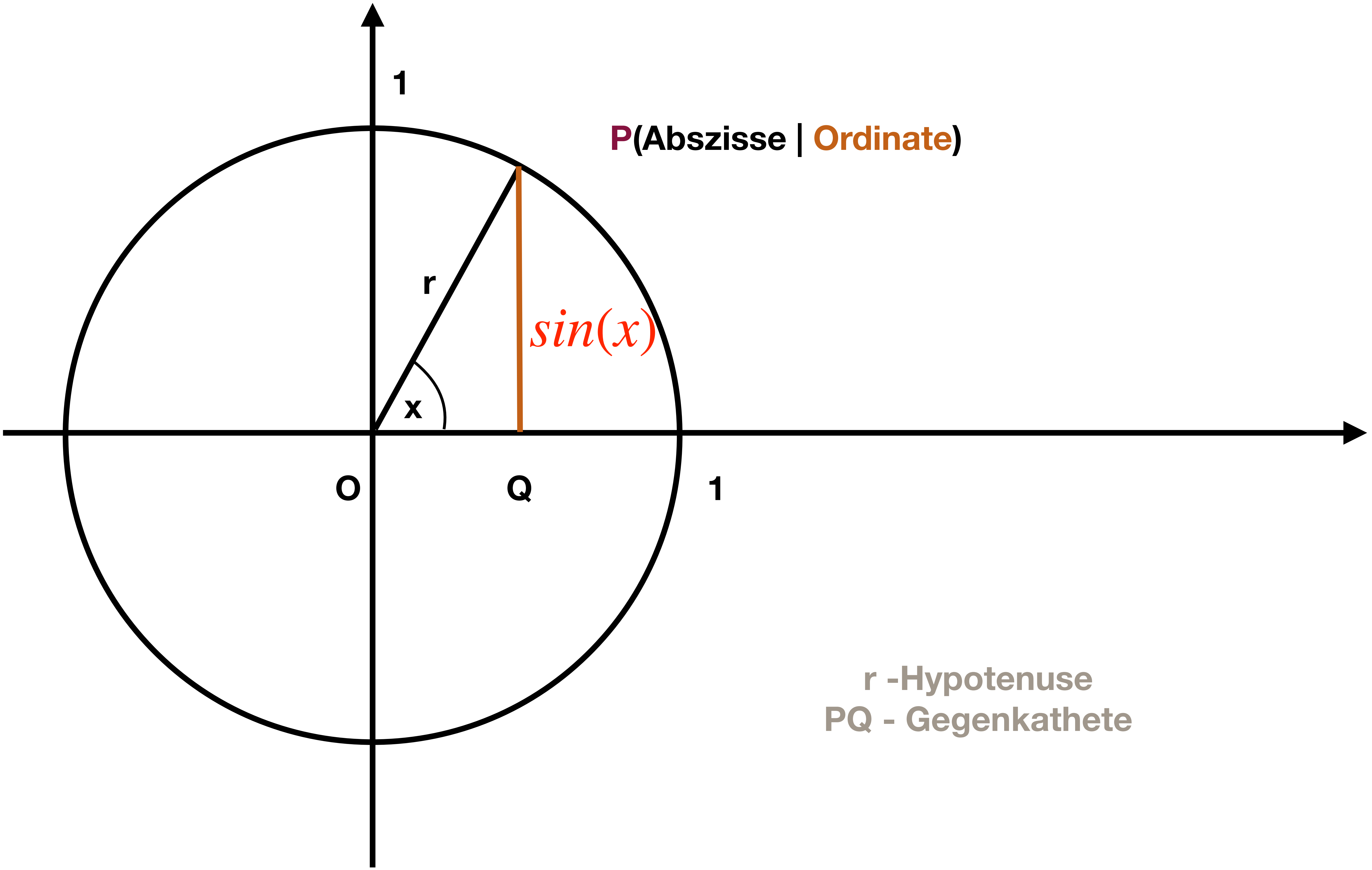

y
y-Achse
y-Koordinate
P(x_P; y_P)
x-Koordinate
x
O
x-Achse


y
Ordinatenachse
Ordinate
P(x_P; y_P)
Abszisse
x
O
Abszissenachse

Sinus, Definition

Der Sinus eines Winkels ist die Ordinate eines Punktes am Einheitskreis.

Einheitskreis:
Radius r = 1 LE
Mittelpunkt=Koordinatenursprung



1
P(Abszisse | Ordinate)
r
sin(x)
x
O
Q
1
r -Hypotenuse
PQ - Gegenkathete

Zeichne auf Millimeterpapier einen Kreis mit dem Radius
r = 5 cm =1 LE!

Bestimme durch zeichnen und messen die Werte des Sinus folgender Winkel:

x	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
sin(x)												

Ergänze durch Überlegung:

x	0°	90°	180°	270°	360°	390°	405°	420°
sin(x)								

Zeichne auf Millimeterpapier einen Kreis mit dem Radius
r = 5 cm =1 LE!

Bestimme durch zeichnen und messen die Werte des Sinus folgender Winkel:

x	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
sin(x)	0,5	0,7	0,86	0,86	0,7	0,5	-0,5	-0,7	-0,86	-0,86	-0,7	-0,5

Ergänze durch Überlegung:

x	0°	90°	180°	270°	360°	390°	405°	420°
sin(x)	0	1	0	-1	0	0,5	0,7	0,86

Sinusfunktion, Definition

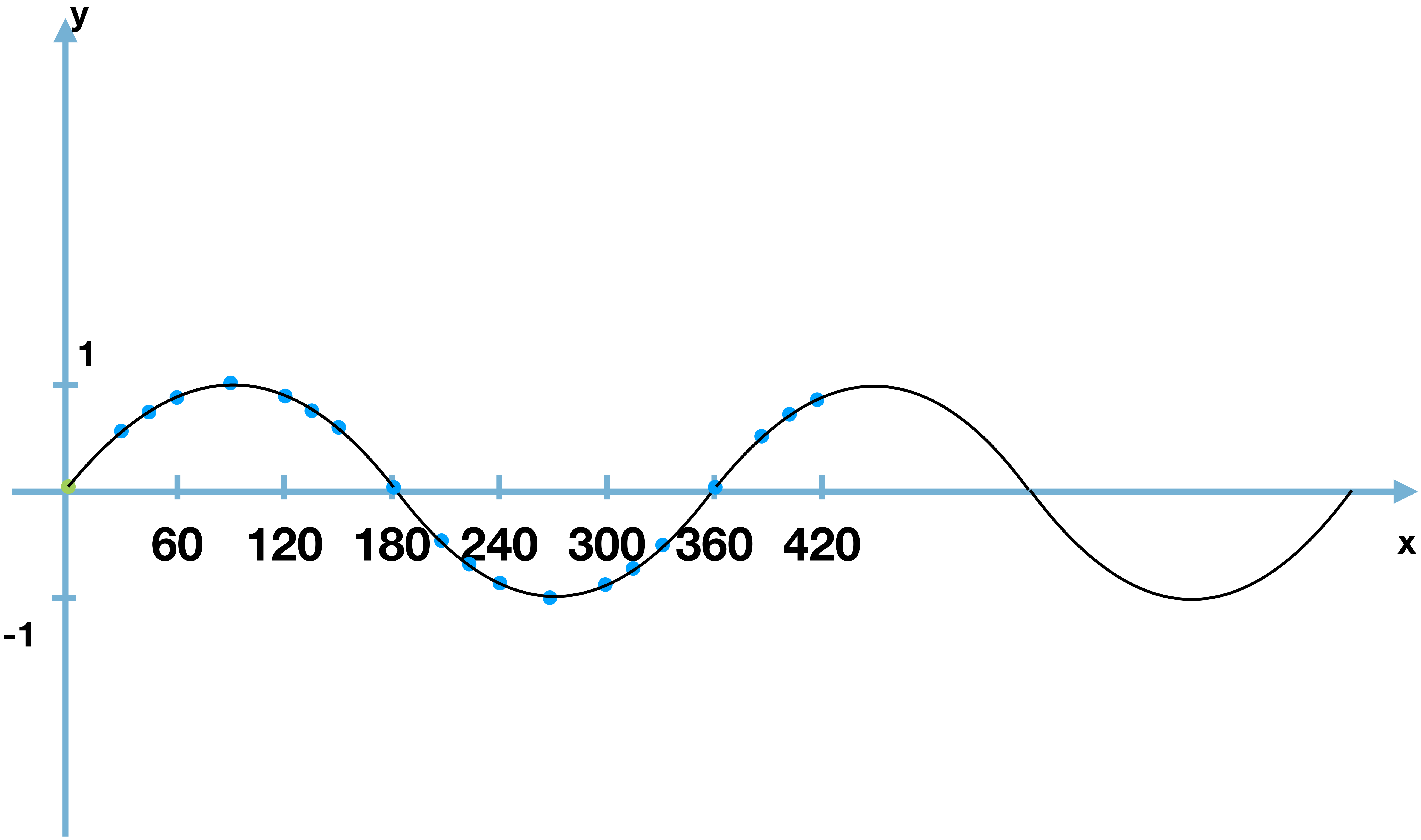
Jedem Winkel x wird der Sinus des Winkel sin(x) zugeordnet.

$D_f = \{x \mid x \in R\}$

$W_f = \{y \mid y \in R\ ;\ -1 \leq y \leq 1\}$

Periode: 2π

Nullstellen: $0+k\cdot\pi$



y
1
-1
60
120
180
240
300
360
420
x

Gradmaß (DEG)

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

Bogenmaß

Gradmaß (DEG)

$$\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180^\circ}$$

Bogenmaß

Skizziere in einem gemeinsamen Koordinatensystem folgende Funktionen:

$$f_1(x) = sin(x)$$

$$f_2(x) = 2 \cdot sin(x)$$

$$f_3(x) = 3 \cdot sin(x)$$

$$f_4(x) = \frac{1}{2} sin(x)$$

$$f_5(x) = -2 \cdot sin(x)$$

Funktionen $f(x) = a \cdot sin(x)$

D_f = {x | x $\in$ R}

W_f = {y | y $\in$ R ; -a ≤ y ≤ a }

Periode: 2π

Nullstellen: 0+k·π; k $\in$ Z

Skizziere in einem gemeinsamen Koordinatensystem folgende Funktionen mit unterschiedlichen Farben:

$$f_1(x) = sin(x)$$

$$f_2(x) = sin(2 \cdot x)$$

$$f_3(x) = sin(4 \cdot x)$$

Skizziere in einem gemeinsamen Koordinatensystem folgende Funktionen mit unterschiedlichen Farben:

$$f_1(x) = sin(x)$$

$$f_2(x) = sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$f_3(x) = 2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Funktionen $f(x) = sin(b \cdot x)$

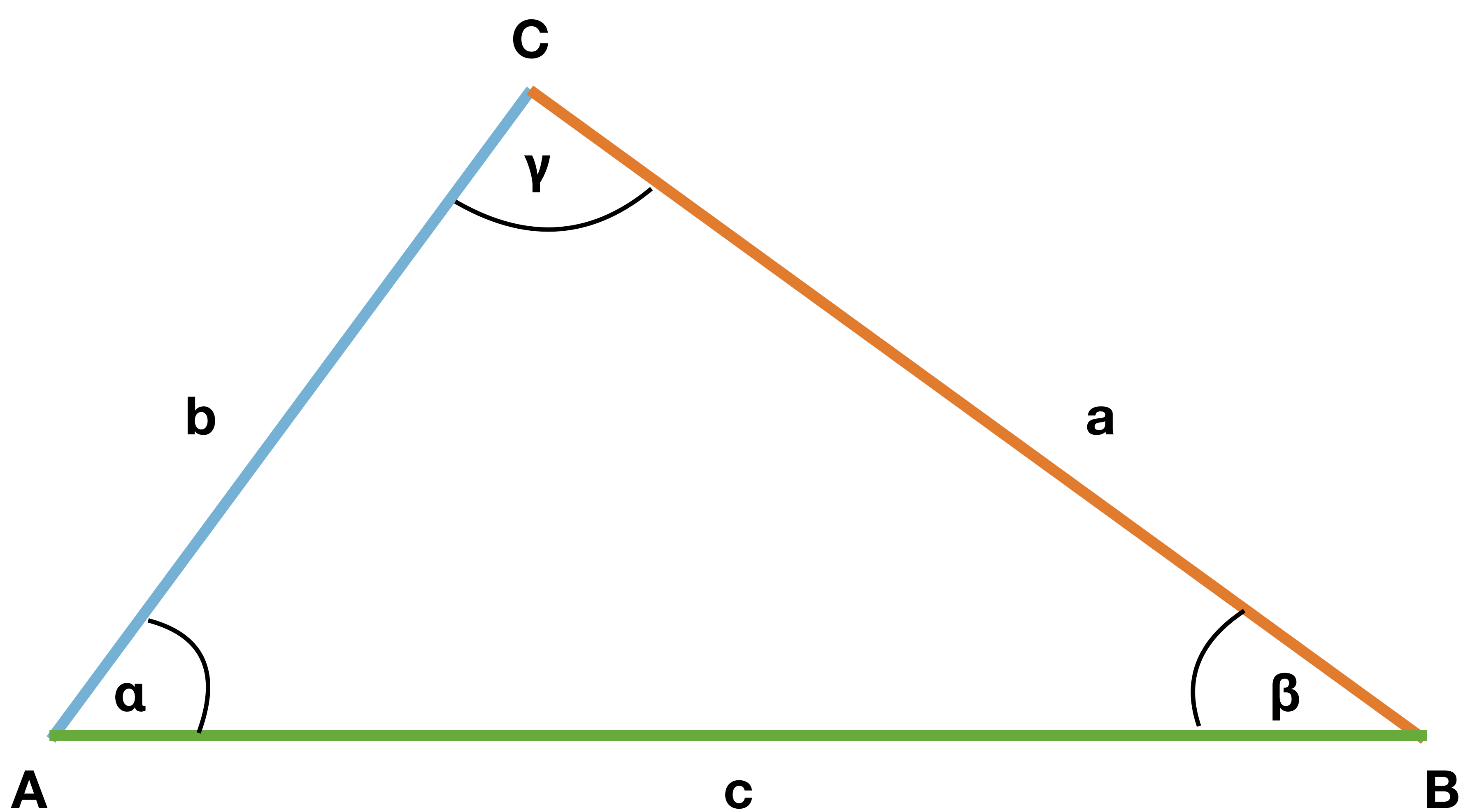
D_f = {x | x $\in$ R}

W_f = {y | y $\in$ R ; -1 ≤ y ≤ 1 }

Periode: $\dfrac{2\pi}{b}$

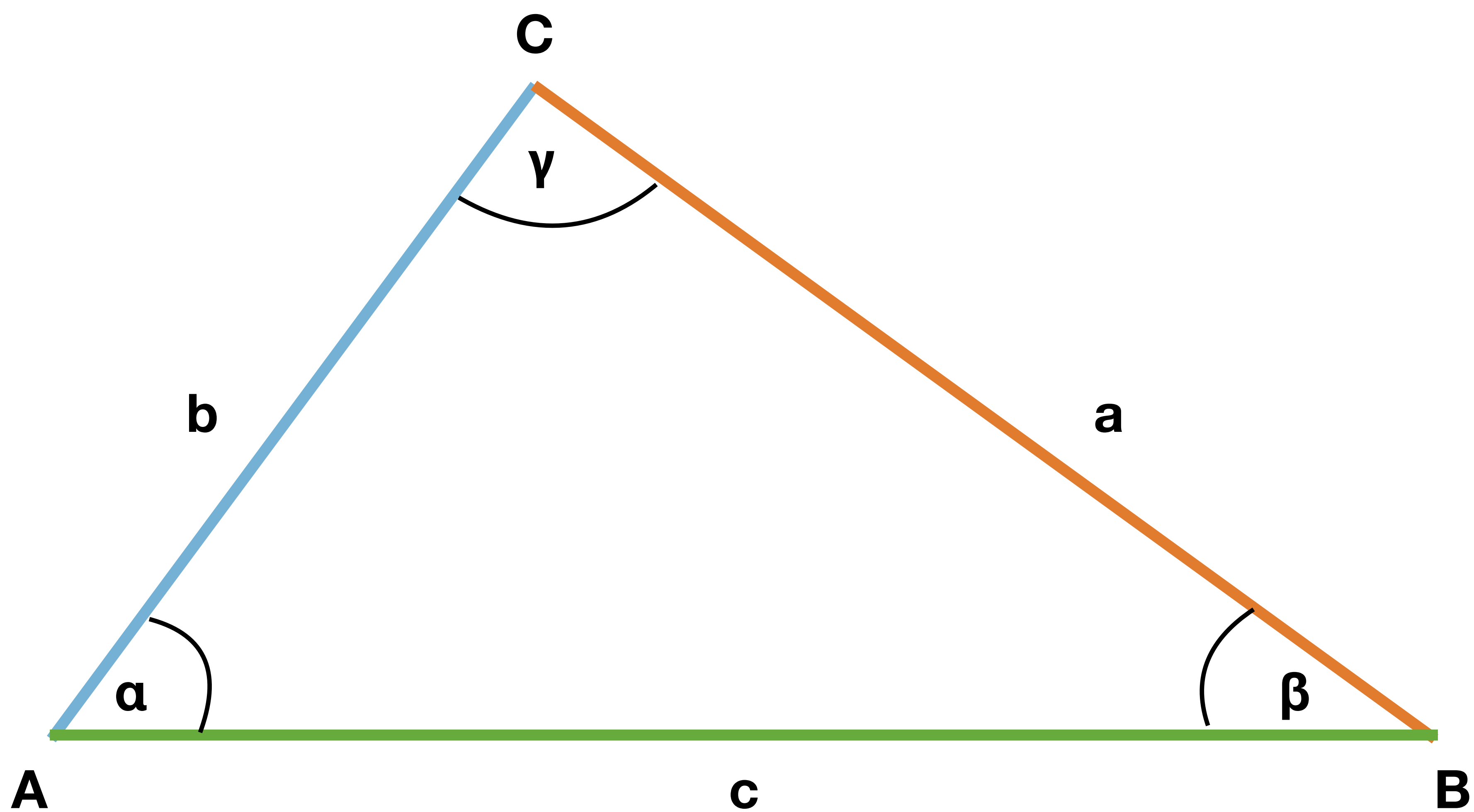
Nullstellen: $0 + k \cdot \dfrac{\pi}{b}$**; k** $\in$ **Z**

Rechtwinkliges Dreieck



$$Cosinus = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

Rechtwinkliges Dreieck

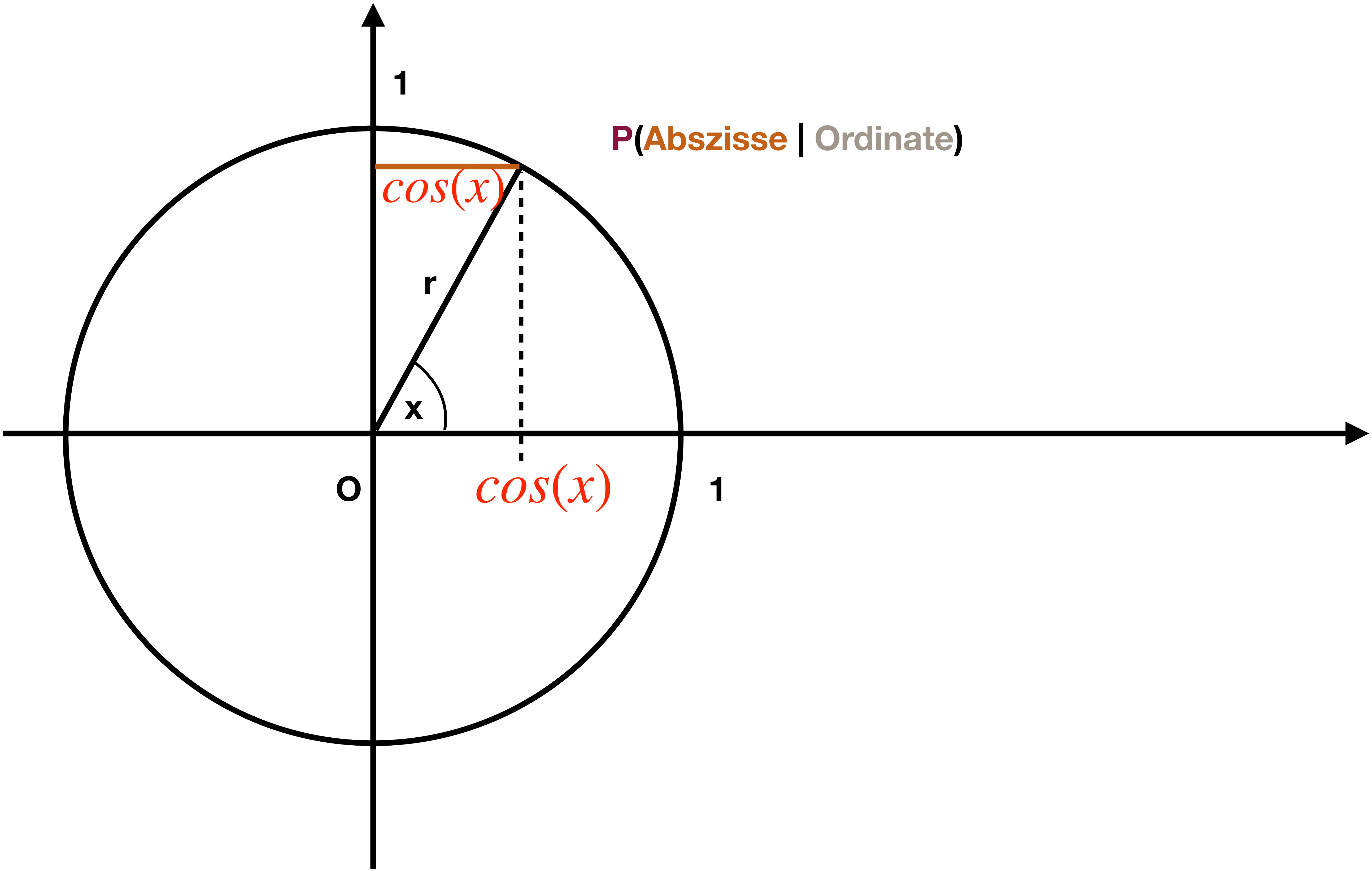


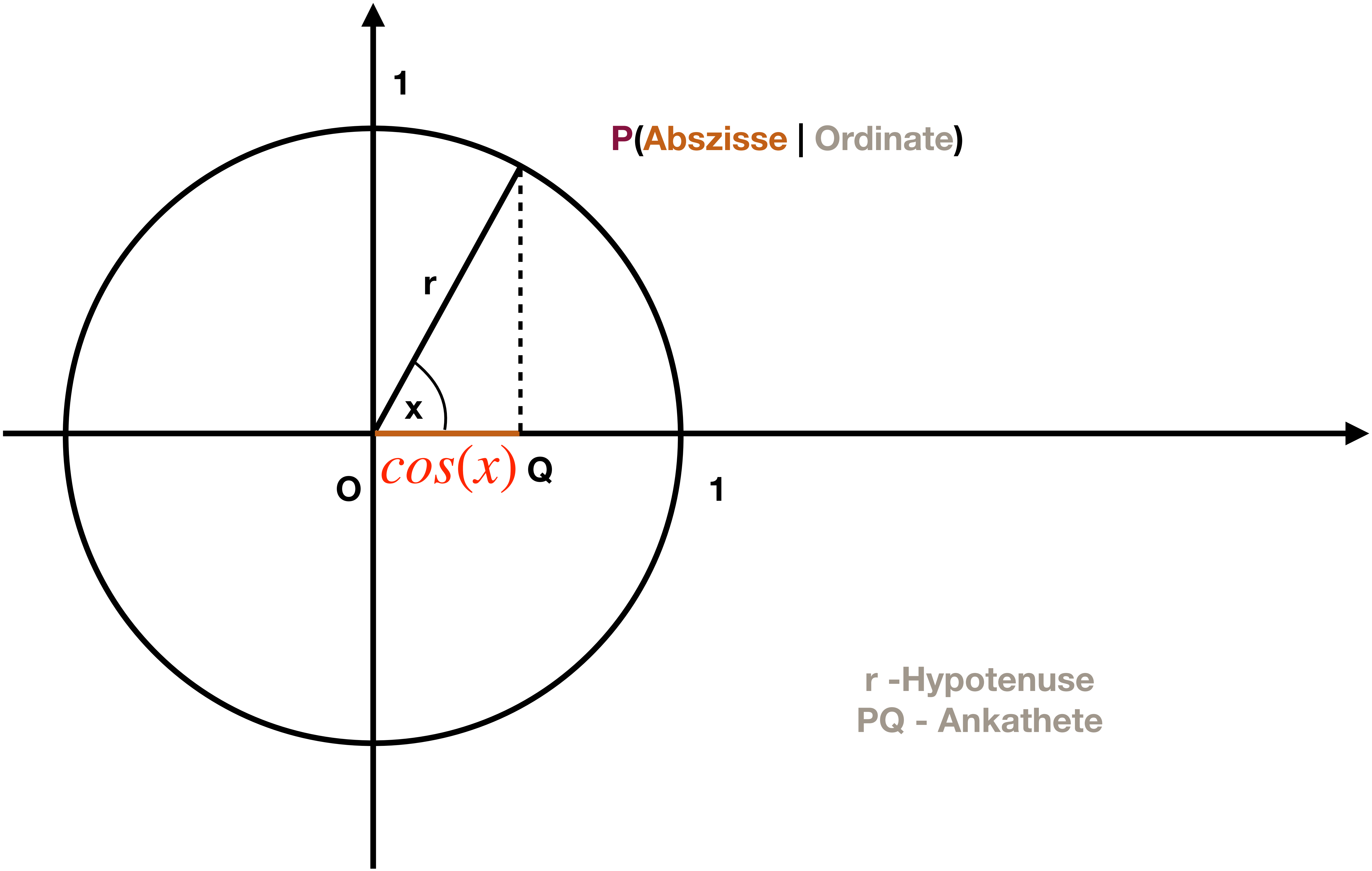
$$cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad cos(\beta) = \frac{a}{c}$$

Cosinus, Definition

Der Cosinus eines Winkels ist die Abszisse eines Punktes am Einheitskreis.

Einheitskreis:
Radius r = 1 LE
Mittelpunkt=Koordinatenursprung


1
P(Abszisse | Ordinate)
cos(x)
r
x
O
cos(x)
1


P(Abszisse | Ordinate)
1
r
x
O
cos(x)
Q
1
r -Hypotenuse
PQ - Ankathete

Zeichne auf Millimeterpapier einen Kreis mit dem Radius
r = 5 cm =1 LE!

Bestimme durch zeichnen und messen die Werte des Cosinus folgender Winkel:

x	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
cos(x)												

Ergänze durch Überlegung:

x	0°	90°	180°	270°	360°	390°	405°	420°
cos(x)								

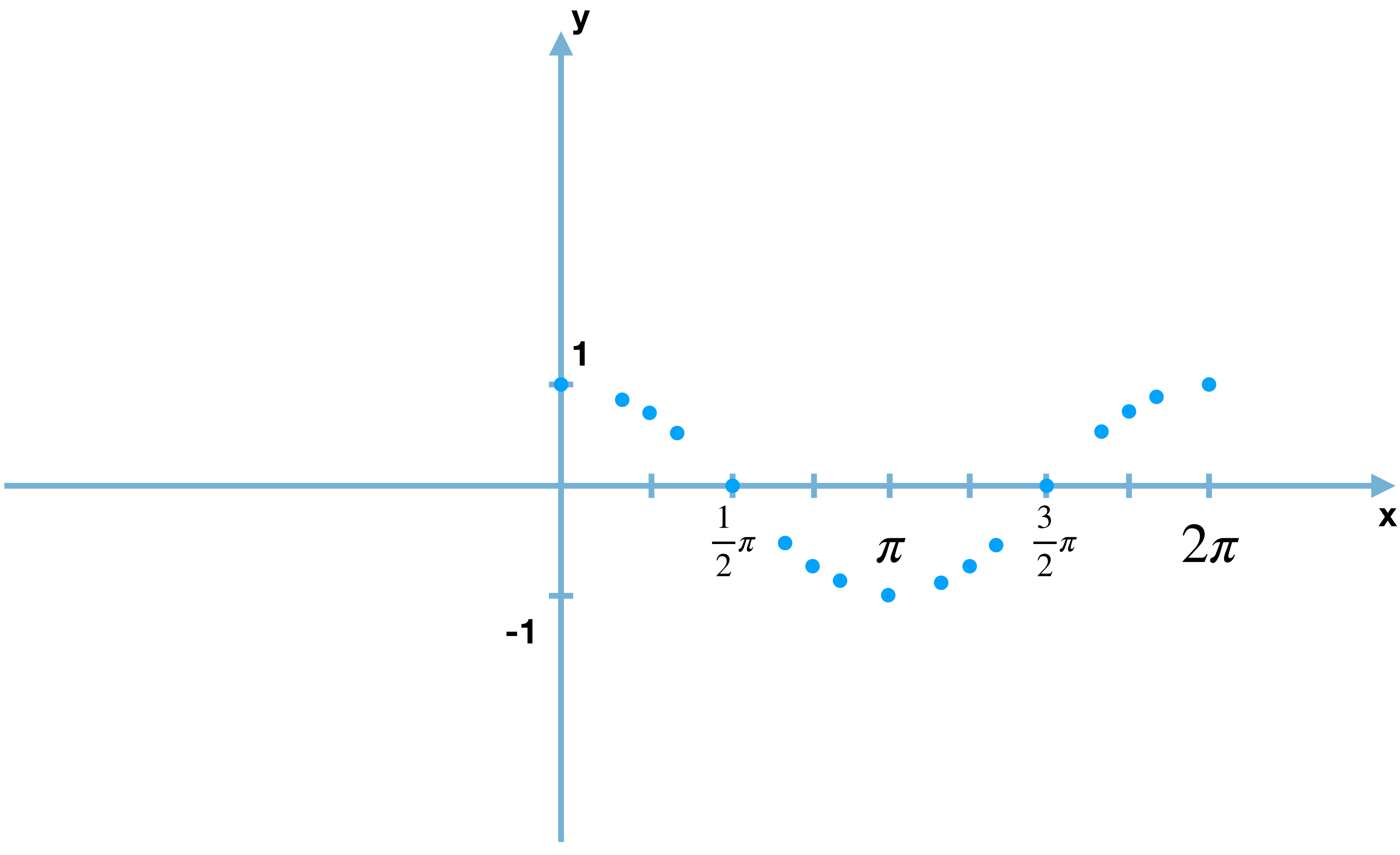
Zeichne auf Millimeterpapier einen Kreis mit dem Radius
r = 5 cm =1 LE!

Bestimme durch zeichnen und messen die Werte des Sinus folgender Winkel:

x	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
cos(x)	0,86	0,7	0,5	-0,5	-0,7	-0,86	-0,86	-0,7	-0,5	0,5	0,7	0,86

Ergänze durch Überlegung:

x	0°	90°	180°	270°	360°	390°	405°	420°
cos(x)	1	0	-1	0	1	0,86	0,7	0,5


y
1
-1
x
$\frac{1}{2}\pi$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π

Cosinusfunktion, Definition

Jedem Winkel x wird der Cosinus des Winkel sin(x) zugeordnet.

$D_f = \{x \mid x \in R\}$

$W_f = \{y \mid y \in R\ ;\ -1 \leq y \leq 1\}$

Periode: 2π

Nullstellen: $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

Skizziere in einem gemeinsamen Koordinatensystem folgende Funktionen:

$$f_1(x) = sin(x)$$

$$f_2(x) = cos(x)$$

$$f_3(x) = sin(x) + 2$$

$$f_4(x) = sin(x) - 2$$

$$f_5(x) = cos(x) + 4$$

$$f_6(x) = cos(x) - 4$$

Gib für alle Funktionen die Periode und den Wertebereich an!

Skizziere in einem gemeinsamen Koordinatensystem folgende Funktionen:

$$f_1(x) = sin(x)$$

$$f_2(x) = cos(x)$$

$$f_3(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_4(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Gib für alle Funktionen die Periode und den Wertebereich an!

1. Gegeben sind die Funktionen $y = f_a(x) = a \cdot \sin x$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie den Wertebereich der Funktionen f_a in Abhängigkeit von a an. (1 BE)

b) Für eine dieser Funktionen f_a ist folgende Wertetabelle gegeben:

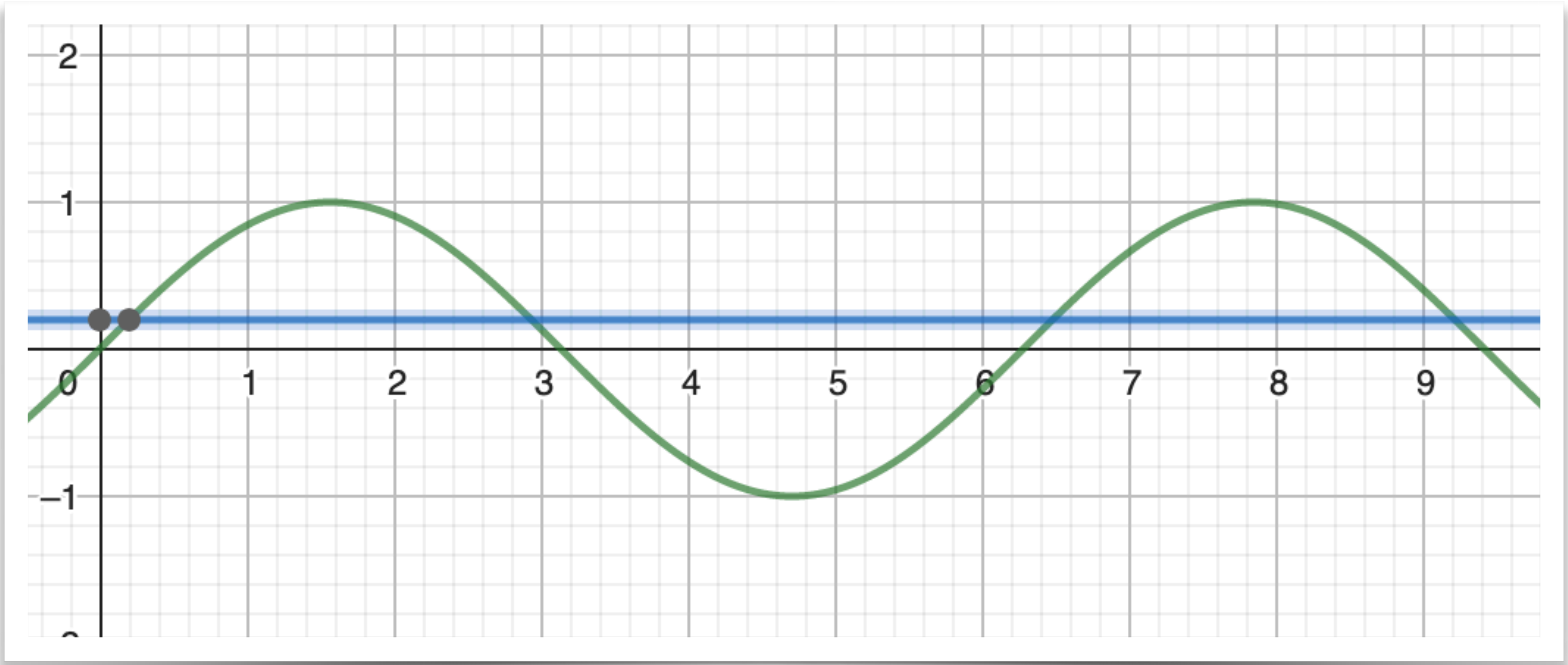
x	0	0,5π	π	1,5π
y	0	2	0	–2

Skizzieren Sie die Funktion mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.
Geben Sie eine zugehörige Funktionsgleichung an. (2 BE)

c) Gegeben ist die Funktion $f_3(x) = 3 \cdot \sin x$.
(1) Der Graph von f_3 wird um zwei Einheiten in Richtung der positiven y-Achse verschoben.
(2) Der Graph von f_3 wird an der x-Achse gespiegelt.

Geben Sie jeweils eine Funktionsgleichung an. (2 BE)

Löse die Gleichung $0{,}2 = sin(x)$!



Löse die Gleichung $0{,}2 = sin(x)$!

1. Lösung

$\arcsin(0{,}2) = 11{,}53°$

$(\sin^{-1}(0{,}2) = 11{,}53°)$

$x_1 = 11{,}53°$

2. Lösung

$180° - 11{,}53° = 168{,}57°$

$x_2 = 168{,}57°$

Alle Lösungen

$11{,}53° + k \cdot 360°$

$168{,}57° + k \cdot 360°$

Löse die Gleichung $0{,}2 = sin(x)$!

1. Lösung

$\arcsin(0{,}2) = 0{,}201$

$(\sin^{-1}(0{,}2) = 0{,}201)$

$x_1 = 0{,}201$

2. Lösung

$\pi - 0{,}201 = 2{,}94$

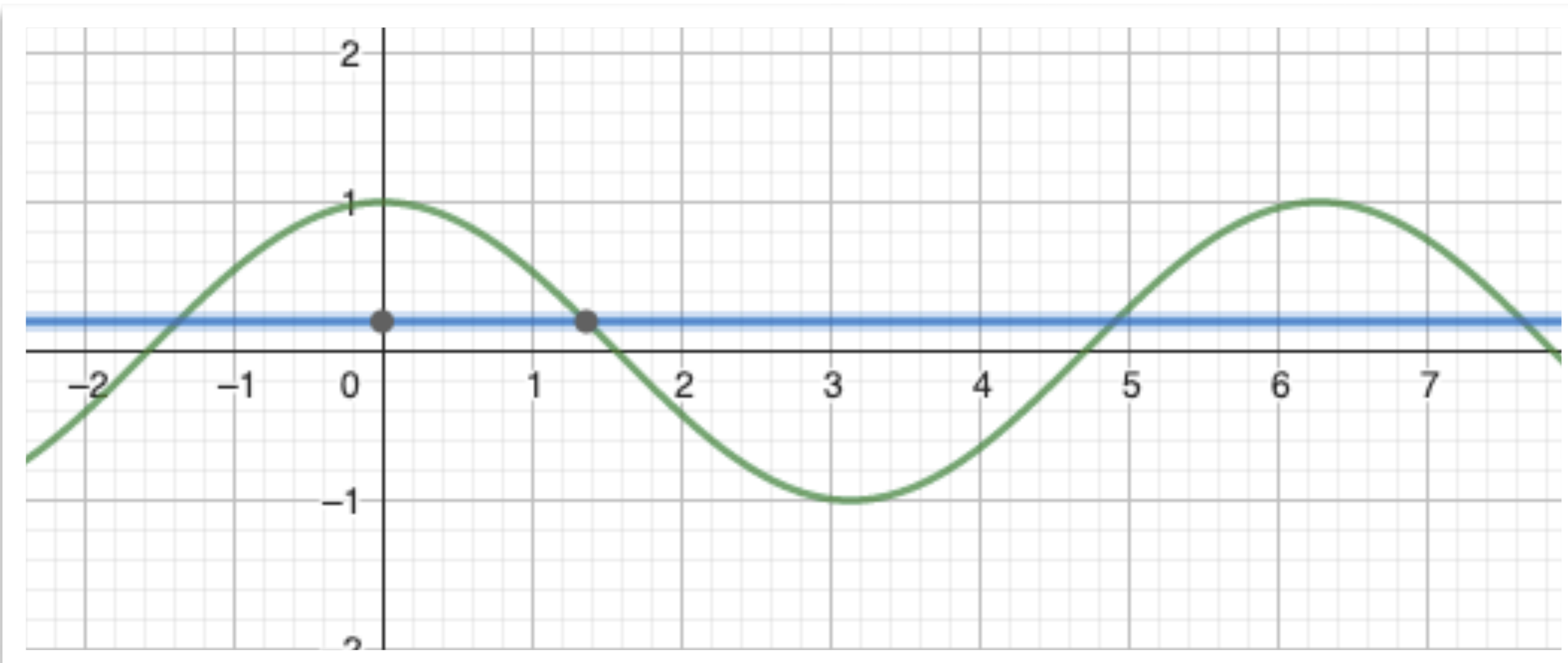
$x_2 = 2{,}94$

Alle Lösungen

$0{,}201 + k \cdot 2\pi$

$2{,}94 + k \cdot 2\pi$

Löse die Gleichung $0{,}2 = cos(x)$**!**



Löse die Gleichung $0{,}2 = cos(x)$!

1. Lösung

$\arccos(0{,}2) = 78{,}5°$

$(\cos^{-1}(0{,}2) = 78{,}5°)$

$x_1 = 78{,}5°$

2. Lösung

$-(78{,}5°) = -78{,}5°$

$x_2 = -78{,}5°$

Alle Lösungen

$78{,}5° + k \cdot 360°$

$-78{,}5° + k \cdot 360°$

Löse die Gleichung $0{,}2 = cos(x)$!

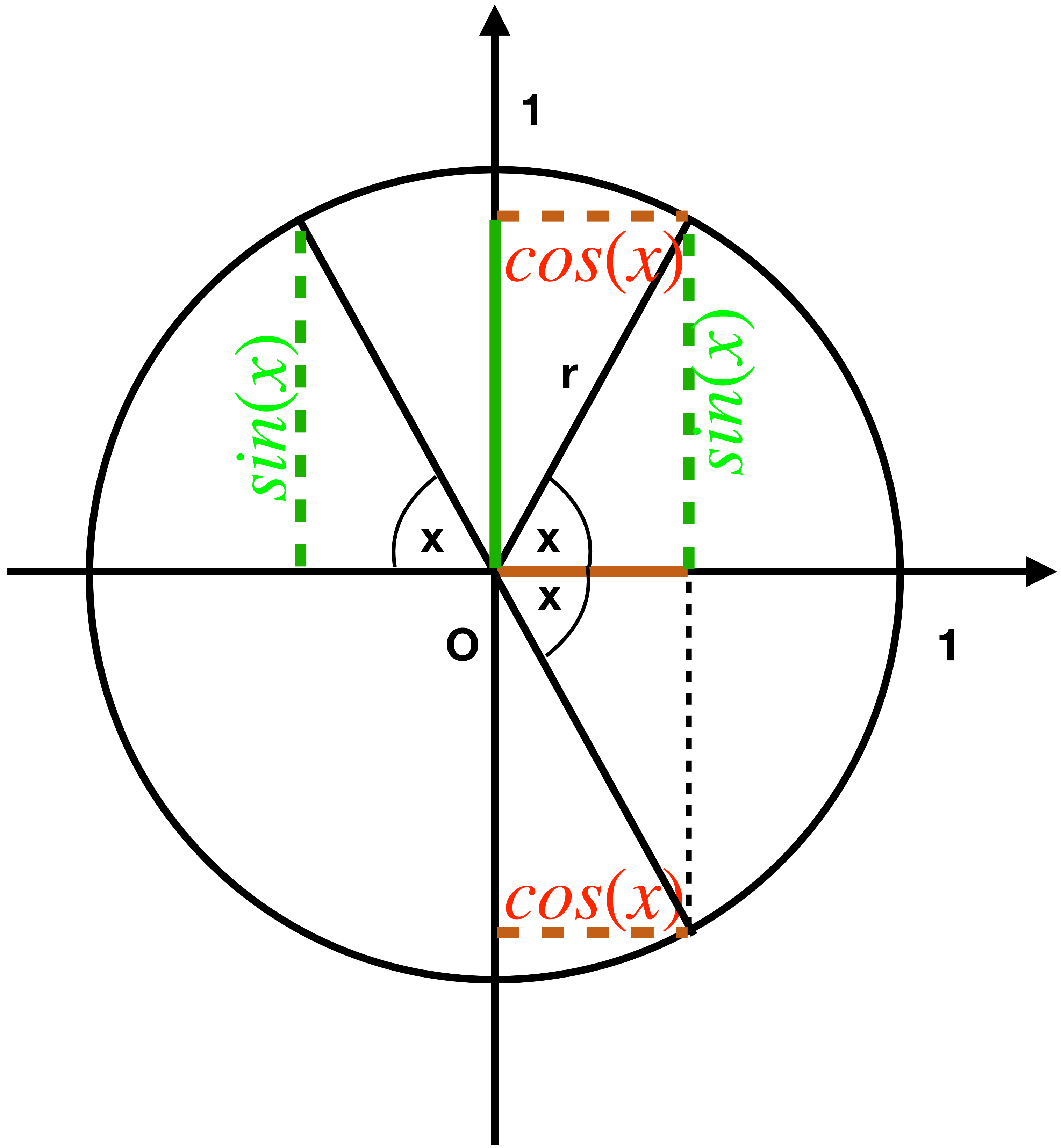
1. Lösung
arccos(0,2) = 1,37
($\cos^{-1}(0{,}2) = 1{,}37$)
$x_1 = 1{,}37$

2. Lösung
-(1,37) = -1,37
$x_2 = -1{,}37$

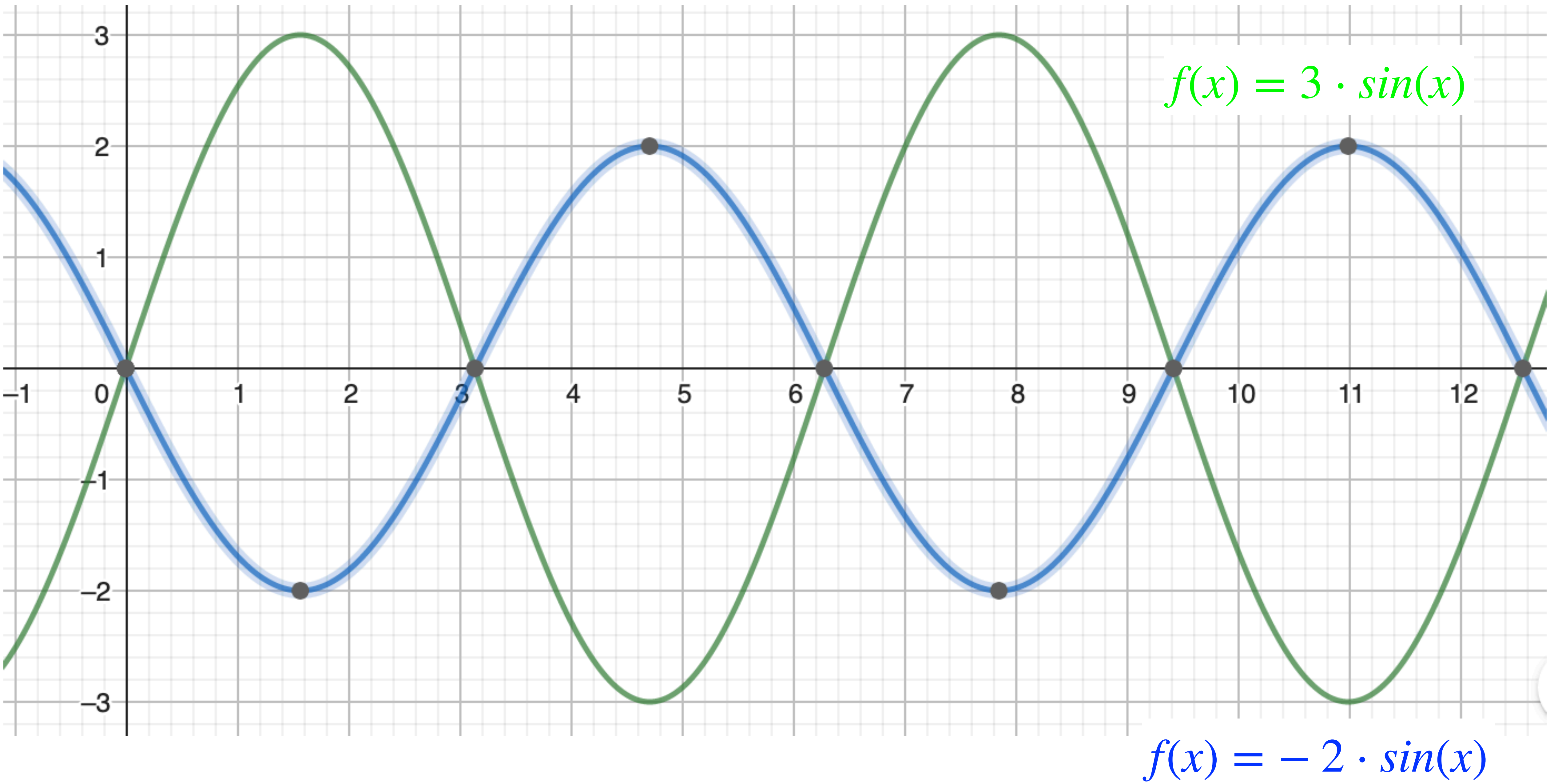
Alle Lösungen
$1{,}37 + k \cdot 2\pi$
$-1{,}37 + k \cdot 2\pi$

$$sin(x) = sin(\pi - x)$$

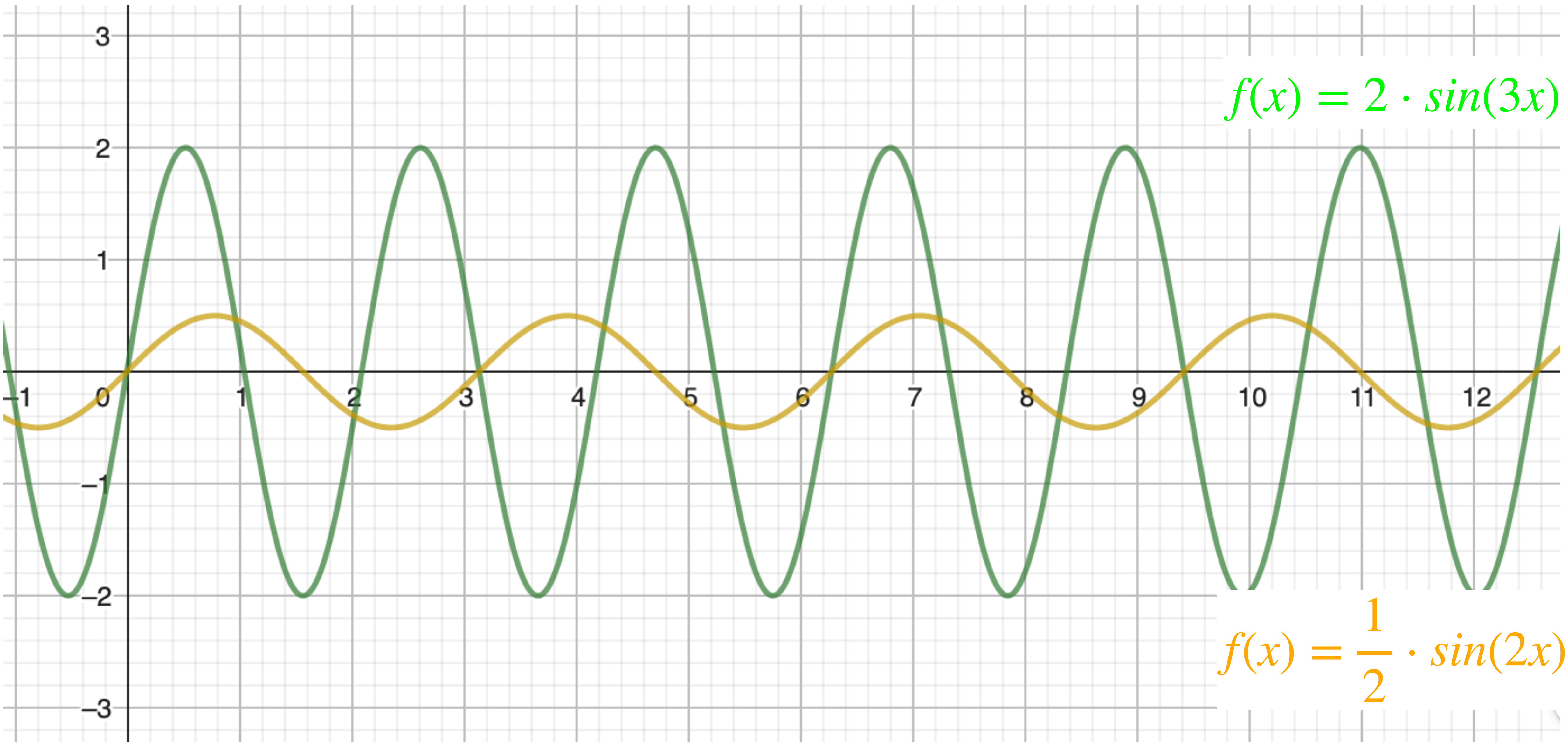
$$cos(x) = cos(-x)$$


1
cos(x)
sin(x)
r
sin(x)
x
x
x
O
1
cos(x)

Ermittle die Funktionsgleichungen f(x)=a·sin(bx)!



Ermittle die Funktionsgleichungen f(x)=a·sin(bx)!



Lehrbuch Seite 126

Probiere es selbst:

Stelle die Funktionen $y = f(x) = -2 \cdot \sin(x + 2) - 1$ und $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(x - 1) + 2$ grafisch dar.

a) Gib jeweils die größten und kleinsten Funktionswerte an.

b) Berechne jeweils $f_1(0)$; $f_2(\pi)$; $f_3(2\pi)$; $f_4(-\pi)$; $f_5(-1)$; $f_6(2)$

c) Bestimme die Nullstellen jeder Funktion im Intervall von $-2\pi < x < 3\pi$.

$$f(x) = -2 \cdot sin(x+2) - 1$$

Überlegungen:

e=-1 => um 1 nach unten verschoben - „Mittellinie bei -1“

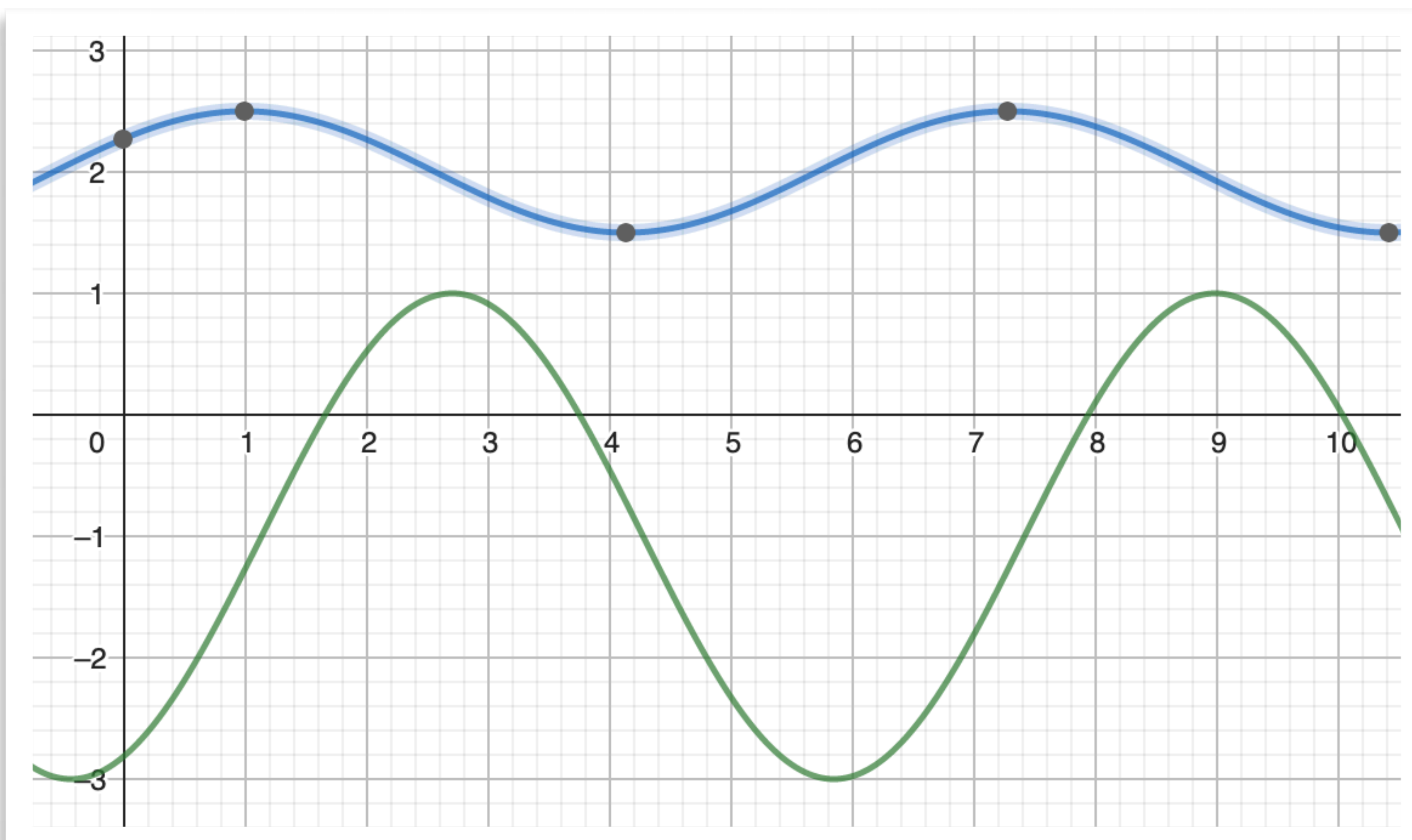
a ist negativ => an der x-Achse gespiegelt

|a|=2 => Maximum 2 über der „Mittellinie“

Minimum 2 unter der „Mittellinie“

d=+2 => um 2 nach links verschoben

Periode: 2π



$$g(x) = \frac{1}{2}cos(x - 1) + 2$$

Überlegungen:

e=2 => um 2 nach oben verschoben - „Mittellinie bei 2“

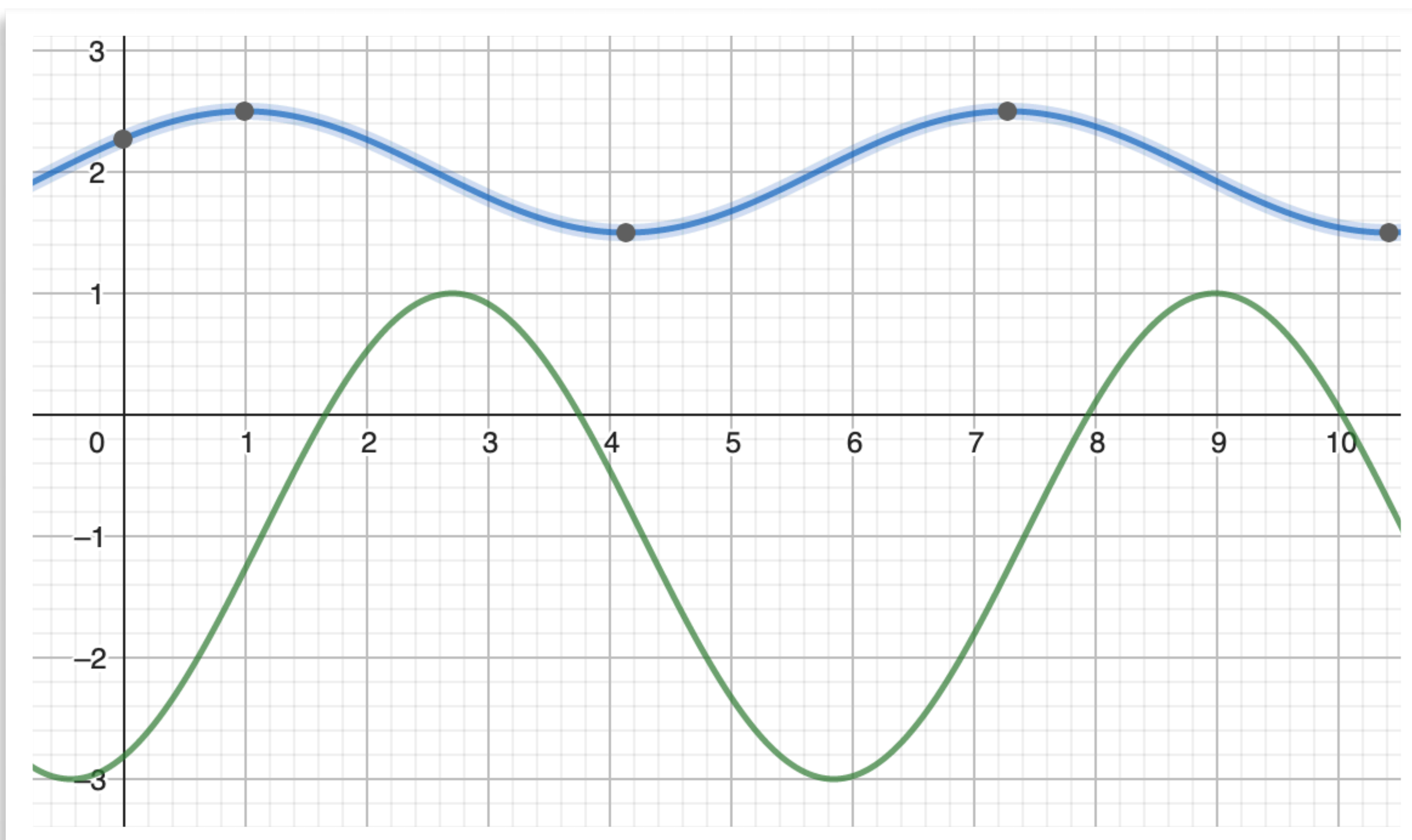
a ist positiv => keine Spiegelung an der x-Achse

a=1/2 => Maximum 1/2 über der „Mittellinie“

Minimum 1/2 unter der „Mittellinie“

d=-1 => um 1 nach rechts verschoben

Periode: 2π



$$f(x) = -2 \cdot sin(x+2) - 1$$

[-3;3]

x	-3,142	-1,000	0	2	3,142	6,23
y	0,819	-2,683	-2,819	0,514	0,818	-2,860

Nullstellen: -4,618: -2,523; 1,665; 3,760; 7,948;

$$g(x) = \frac{1}{2}cos(x - 1) + 2$$

[1,5;2,5]

x	-3,142	-1,000	0	2	3,142	6,23
y	1,730	1,792	2,270	2,270	1,730	2,247

Nullstellen: keine